В.А. Шилинец, *декан математического факультета БГПУ*

ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ В ШКОЛЕ

В последнее время большое количество учащихся выбирают экономические специальности в качестве своей дальнейшей деятельности. Как правило, учителя, преподающие математику, практически не рассматривают экономические приложения той или иной темы, мало времени уделяют применению математического моделирования к решению экономических задач.

Знакомство с геометрическим смыслом системы линейных неравенств с двумя переменными дает возможность учителю математики на факультативных занятиях продемонстрировать применение этой теории к решению практических задач оптимального использования наличных ресурсов: транспорта, сырья, рабочей силы и т.д. Речь идет о так называемом методе линейного программирования.

В настоящей статье мы обсудим, как на факультативных занятиях по математике познакомить учащихся с геометрическим методом решения задач линейного программирования для простейшего случая двух переменных. Заметим, что сам процесс решения обучает элементам исследовательской деятельности.

Прежде чем определить, что такое линейное программирование, следует привести пример упрощённой экономической задачи, носящей иллюстративный характер.

Как правило, задачи, с которыми мы встречаемся в экономике, – это экстремальные задачи на отыскание наиболее выгодного варианта.

Задача 1. С поля на овощную базу перевозятся овощи автомашинами грузоподъемностью по 5 и 10 тонн. За 1 ч база может принять не более 10 машин, при этом не более 8 машин по 5 тонн и не более 6 машин по 10 тонн. Сколько машин по 5 и по 10 тонн нужно отправлять с поля на базу за 1 ч, чтобы перевозить наибольшее количество овощей?

Решение. Переведём задачу на математический язык. Пусть за 1 ч отправляется x машин по 5 тонн и y машин по 10 тонн. По условию задачи получим систему неравенств

$$\begin{cases} x \ge 0, \\ x \le 8, \\ y \ge 0, \\ y \le 6, \\ x + y \le 10. \end{cases} \qquad (1)$$

Всего за 1 ч перевозится $z = 5x + 10y$ тонн овощей.

Таким образом, среди неотрицательных целочисленных решений системы (1) нужно выбрать такое, которое сообщает наибольшее значение линейной функции $z = 5x + 10y$.

Рассмотренный нами пример, конечно, очень примитивен, но он даёт некоторое представление о характере задач линейного программирования. В каждой из них требуется найти максимальное (или минимальное) значение некоторой линейной функции n переменных $f = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n$, при условии, что эти переменные подчинены некоторой системе линейных неравенств (в число которых входят обязательно условия неотрицательности переменных: $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, ..., x_n \geq 0$) [1].

После того, как у школьников сложилось элементарное представление о линейном программировании, следует выяснить геометрический смысл линейного неравенства с двумя переменными.

Как известно [2], линейными неравенствами с двумя переменными называются неравенства вида $Ax + By + C > 0$, $Ax + By + C < 0$, $Ax + By + C \geq 0$ и $Ax + By + C \leq 0$, где x, y – переменные, a, b и c – любые действительные числа.

Решением неравенства с двумя переменными называется любая упорядоченная пара действительных чисел $(x_0; y_0)$, обращающая неравенство в истинное высказывание [2].

Рассмотрим, например, неравенство

$$Ax + By + C > 0 \quad (A \neq 0 \text{ или } B \neq 0). \qquad (2)$$

Пусть $B \neq 0$. Если $B > 0$, то неравенство (2) равносильно неравенству $y > -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$, если же $B < 0$, то неравенство (2) равносильно неравенству $y < -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$.

Таким образом, решение неравенства (2) сводится к решению неравенств вида $y > kx + b$, $y < kx + b$.

Рассмотрим уравнение $y = kx + b$, где x, y – переменные, k, b – некоторые действительные числа. Графиком его является прямая l, разбивающая всю плоскость xOy (рис. 1) на две полуплоскости: I (верхняя) и II (нижняя).

На прямой l возьмём некоторую точку $M(x_1; y_1)$. Координаты этой точки удовлетворяют условию $y_1 = kx_1 + b$.

Для любой точки $E(x_1; y_2)$, не лежащей на прямой l и находящейся в полуплоскости I, имеем $y_2 > y_1$. Следовательно, $y_2 > kx_1 + b$.

Для любой точки $P(x_1; y_3)$, не принадлежащей прямой l и находящейся в полуплоскости II, имеем $y_3 < kx_1 + b$.

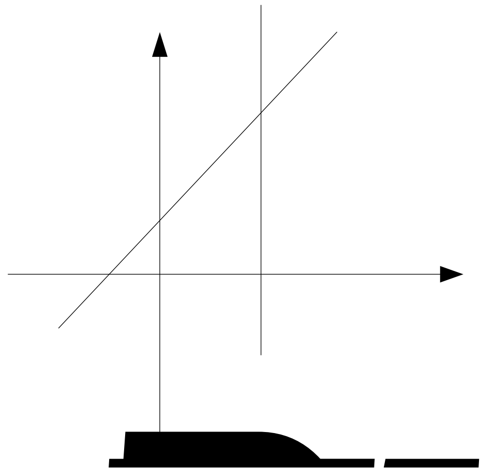

Рисунок 1

Поскольку в качестве M была выбрана любая точка прямой l, то можно сделать следующий вывод: геометрически решениями неравенств $y > kx + b$, $y < kx + b$ являются множества точек соответственно верхней, нижней полуплоскостей, на которые прямая $y = kx + b$ делит координатную плоскость, исключая точки самой прямой.

Если в неравенстве $Ax + By + C > 0$ $A \neq 0$, $B = 0$, то неравенство примет вид $Ax + C > 0$. Неравенству в этом случае удовлетворяют такие пары чисел x, y, что $x > -\dfrac{C}{A}$ при $A > 0$ и $x < -\dfrac{C}{A}$ при $A < 0$, y – любое действительное число.

Геометрически это свидетельствует о том, что неравенству $Ax + C > 0$ при $A > 0$ и $A < 0$ удовлетворяют все точки соответственно правой и левой полуплоскостей, на которые прямая $x = -\dfrac{C}{A}$ делит координатную плоскость, исключая точки самой прямой $x = -\dfrac{C}{A}$ (рис. 2).

Рисунок 2

Если в неравенстве (2) $A=0$, $B\neq 0$, то неравенство примет вид $By+C>0$. Этому неравенству при $B>0$ и $B<0$ удовлетворяют все точки соответственно верхней и нижней полуплоскостей, на которые прямая $y=-\dfrac{C}{B}$ делит координатную плоскость (рис. 3), исключая точки самой прямой $y=-\dfrac{C}{B}$.

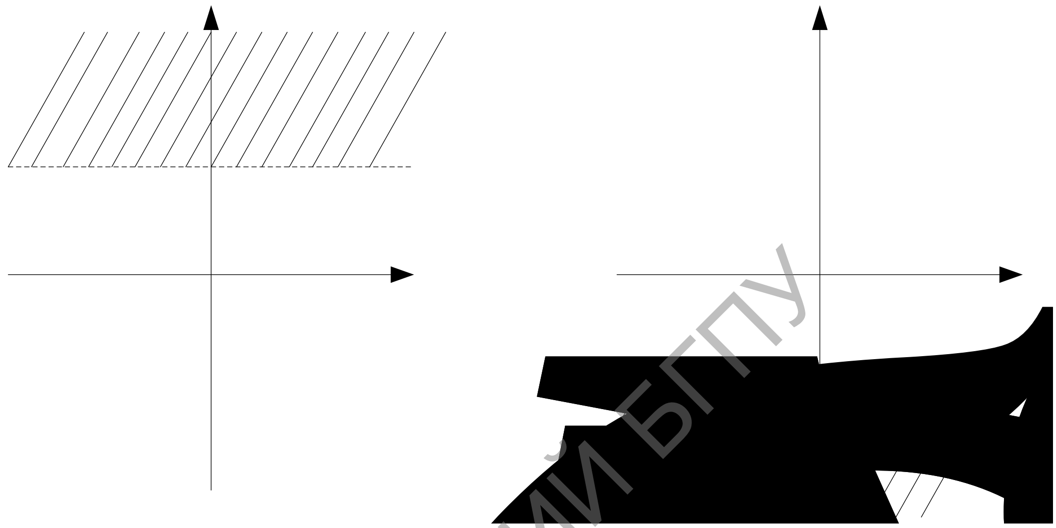

Рисунок 3

Итак, для геометрического изображения решений линейного неравенства с двумя неизвестными $Ax+By+C>0$ ($A\neq 0$ или $B\neq 0$) поступают следующим образом.

Строят прямую $Ax+By+C=0$ ($A\neq 0$ или $B\neq 0$) (рис. 4). Эта прямая разбивает плоскость на две части (полуплоскости). Если прямая $Ax+By+C=0$ не проходит через начало координат, то полученные полуплоскости можно различать, как полуплоскости, содержащую и не содержащую начало координат соответственно.

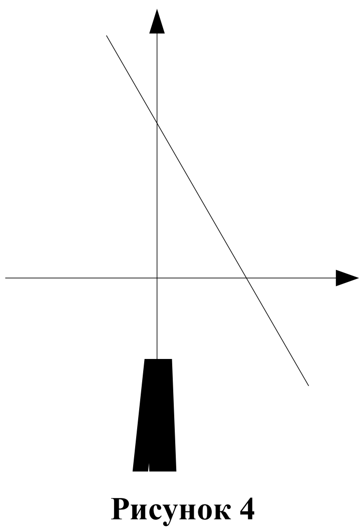

Рисунок 4

Множество решений неравенства $Ax+By+C>0$, где $A\neq 0$ или $B\neq 0$, составляет одну из полуплоскостей относительно прямой $Ax+By+C=0$. Чтобы определить, какую именно, достаточно взять произвольную точку, не лежащую на прямой, и подставить её координаты в данное неравенство. Если её координаты удовлетворяют заданному неравенству, то решением будет полуплоскость, содержащая данную точку; если нет – вторая полуплоскость.

Чаще всего в том случае, когда прямая $Ax+By+C=0$ не проходит через начало координат, в качестве пробной точки берут начало системы координат.

Если неравенство строгое, то точки прямой $Ax+By+C=0$ не включают во множество решений и границу изображают штриховой линией. Если же неравенство нестрогое, то множество точек прямой $Ax+By+C=0$ включается во множество решений данного неравенства. В этом случае границу изображают сплошной линией.

В задачах линейного программирования чаще всего приходится рассматривать систему конечного числа линейных неравенств с двумя переменными:

$$\left.\begin{array}{l} A_1x+B_1y+C_1\geq 0,\\ A_2x+B_2y+C_2\geq 0,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ A_mx+B_my+C_m\geq 0.\end{array}\right\} \qquad (3)$$

Заметим, что знаки неравенств в системе (3) могут быть разными, но мы всегда можем свести её к виду (3).

Далее следует выяснить геометрический смысл системы линейных неравенств (3). Можно предложить учащимся следующие однотипные задачи [3]: изобразить на координатной плоскости множество точек

$$E_1=\{(x,y)\mid 3x+4y\leq 12\};$$

$$E_2=\{(x,y)\mid 2x+y\leq 4\};$$

$$E_3=\{(x,y)\mid x\geq 0\};\ E_3=\{(x,y)\mid y\geq 0\}.$$

Сначала эти множества точек изображаются на различных рисунках (рис. 5, а) – г)), а затем они переносятся на один (рис.5, д)).

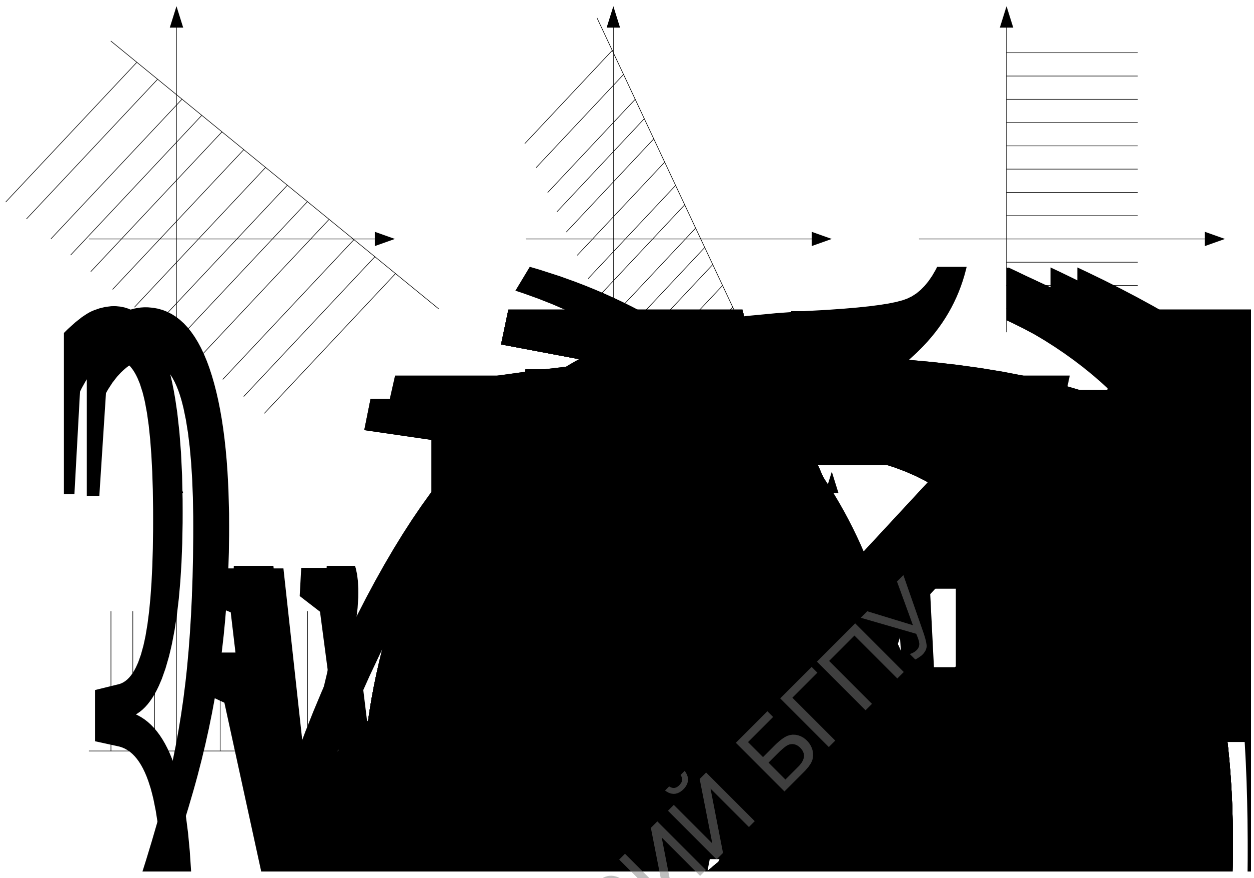

Рисунок 5

Возникает вопрос, что представляет собой множество E (четырёхугольник, образовавшийся на рис. 5, д)). Этот вопрос, по–видимому, не вызовет затруднений. В противном случае его можно сформулировать так: как связано с множествами E_1, E_2, E_3, E_4 множество E? Далее записываем $E = E_1 \cap E_2 \cap E_3 \cap E_4$, т.е. E – множество решений системы неравенств

$$\left.\begin{array}{l} 3x + 4y \le 12, \\ 2x + y \le 4, \\ x \ge 0, \\ y \ge 0. \end{array}\right\} \qquad (4)$$

Обобщая, получаем: пересечение всех полуплоскостей (если оно не пустое), определяемых неравенствами (3), является выпуклой фигурой. Граница этой выпуклой фигуры состоит из нескольких отрезков.

Следовательно, пересечение всех полуплоскостей представляет собой выпуклую многоугольную область G (рис. 6).

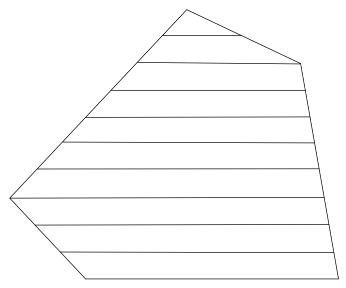

Рисунок 6

Область G называется областью решений системы (3). Сразу же отметим, что область G не всегда бывает ограничена. В результате пересечения нескольких полуплоскостей может возникнуть и неограниченная выпуклая многоугольная область G, как например, область на рисунке 7.

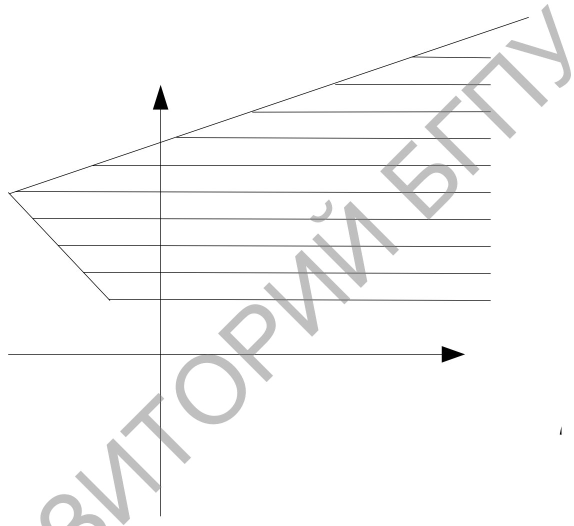

Рисунок 7

В том случае, когда область G ограничена, её называют также многоугольником решений системы (3).

Итак, геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют всем неравенствам системы (3), или область решений системы (3), есть выпуклая многоугольная область G, чаще всего выпуклый многоугольник G.

Далее следует ввести понятие опорной прямой к многоугольнику G и рассмотреть линии уровня линейной функции. Осуществить это можно следующим образом.

Пусть дана прямая l и выпуклый многоугольник G.

Прямая называется опорной к многоугольнику G, если она содержит, по крайней мере, одну общую с ним точку, или обладает тем свойством, что многоугольник лежит по одну сторону от этой прямой.

Могут иметь место следующие случаи:

1) многоугольник G имеет с опорной прямой l одну общую точку, т.е. опорная прямая l проходит через одну из вершин многоугольника G (рис. 8);

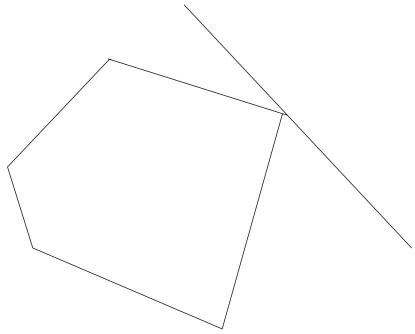

Рисунок 8

2) многоугольник G имеет с опорной прямой бесчисленное множество общих точек, т.е. одна из сторон многоугольника G принадлежит опорной прямой l (рис. 9).

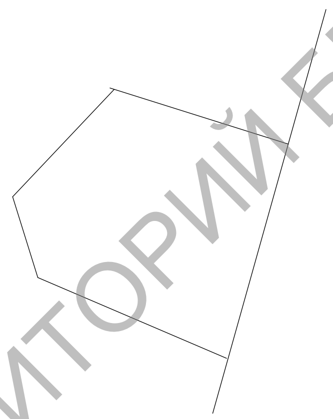

Рисунок 9

Рассмотрим линейную функцию двух переменных $z = ax + by$, где a, b принимают любые действительные значения ($a \neq 0$ или $b \neq 0$). Выберем какое-нибудь действительное число c и рассмотрим множество точек (x, y) плоскости, в которых рассматриваемая функция принимает значение c. Все эти точки описываются соотношением

$$ax + by = c, \tag{5}$$

т.е. геометрически представляют прямую линию.

Прямая (5) называется линией уровня функции $z = ax + by$ или линией равных значений этой функции. Таким образом, линией уровня c линейной функции двух переменных $z = ax + by$ (a, b – постоянные числа) называется прямая l с уравнением $ax + by = c$.

Меняя значение c, при тех же значениях a и b, мы будем получать семейство прямых, параллельных между собой.

В прямоугольной системе координат построим точку $A(a;b)$, координаты которой совпадают с коэффициентами при переменных линейной функции $z = ax + by$. Соединив точку

A с точкой O, получим вектор $\overrightarrow{OA}$ (в дальнейшем будем обозначать его $\vec{n}(a;b)$ и называть нормальным вектором). Через точку A проведем прямую PQ, перпендикулярную OA. Докажем, что прямая PQ является линией уровня линейной функции двух переменных $z = ax + by$ (рис. 10).

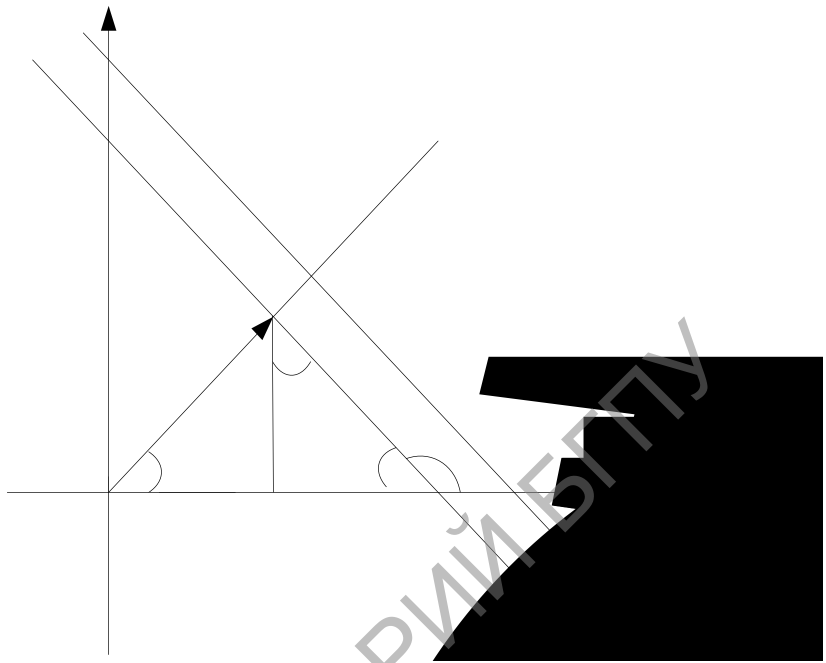

Рисунок 10

Известно, что угловой коэффициент k прямой PQ равен $tg\varphi$, т.е. $k = tg\varphi$, где φ – угол между положительным направлением оси Ox и этой прямой. Но $tg\varphi = tg(180^\circ - \alpha) = -tg\alpha$; $tg\alpha = tg(90^\circ - \beta) = ctg\beta$. Тогда $tg\varphi = -ctg\beta$. Из треугольника AOB имеем $ctg\beta = \dfrac{a}{b}$. Следовательно, $k = tg\varphi = -ctg\beta = -\dfrac{a}{b}$.

Запишем уравнение прямой PQ в виде $y = kx + c_1$ и подставим вместо k его выражение. Получим $y = -\dfrac{a}{b}x + c_1$, или $ax + by - bc_1 = 0$. Обозначим bc_1 через c, тогда прямая PQ будет иметь своим уравнением $ax + by = c$. Мы доказали, что прямая PQ есть линия уровня функции $z = ax + by$, для которой значение линейной функции равно c.

Будем перемещать линию уровня PQ параллельно самой себе по направлению вектора $\vec{n}$. Естественно, что значение линейной функции при переходе от одной линии уровня к другой будет меняться.

Далее следует показать учащимся, что направление вектора $\vec{n}$ есть направление увеличения значений линейной функции $z = ax + by$, а движение вдоль вектора в противоположном направлении уменьшает значение линейной функции. Для этого можно рассмотреть следующий пример.

Пример. Пусть $z = x + 2y$. В этом примере $a = 1$, $b = 2$. Зададим уровни $c_1 = 4$, $c_2 = 7$, $c_3 = 10$.

Линия l_1 уровня $c_1 = 4$ имеет уравнение $x + 2y = 4$. Линия l_2 уровня $c_2 = 7$ имеет уравнение $x + 2y = 7$. Линия l_3 уровня $c_3 = 10$ имеет уравнение $x + 2y = 10$.

Точки $A_1(2;1)$, $B_1(4;0)$ лежат на прямой l_1, так как их координаты удовлетворяют уравнению $x + 2y = 4$. Точки $A_2(3;2)$ и $B_2(7;0)$ лежат на прямой l_2, поскольку их координаты удовлетворяют уравнению $x + 2y = 7$. Точки $A_3(4;3)$ и $B_3(10;0)$ лежат на прямой l_3, так как их координаты удовлетворяют уравнению $x + 2y = 10$.

Прямые l_1, l_2, l_3 параллельны друг другу и имеют общий нормальный вектор $\vec{n}(1;2)$.

На рисунке 11 видно, что линия l_3 наибольшего уровня $c_3 = 10$ лежит выше l_2 и l_1. Линия наименьшего уровня $c_1 = 4$ лежит ниже l_2 и l_3.

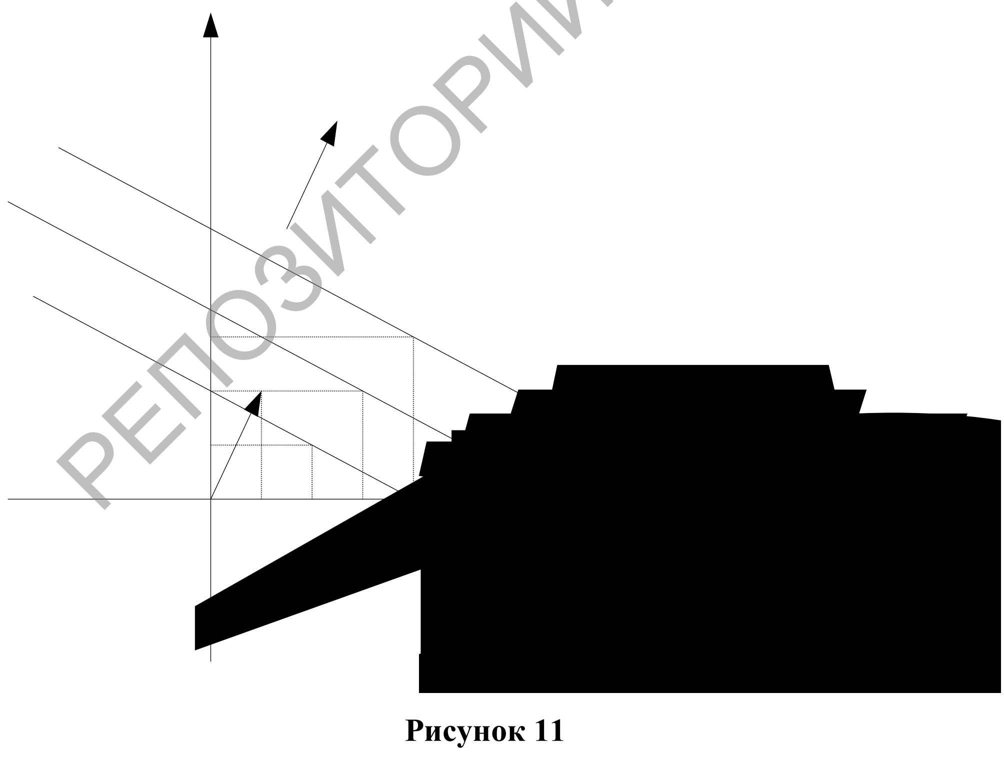

Рисунок 11

Если двигать линейку перпендикулярно вектору $\vec{n}$, то чем дальше в этом направлении мы будем её двигать, тем большего уровня c получим прямую l, и тем большее значение будет принимать линейная функция двух переменных в точках этой прямой l.

Далее следует с учащимися выяснить вопрос о наибольшем и наименьшем значениях линейной функции двух переменных на выпуклой многоугольной области.

Для этого рассмотрим следующую задачу: изобразить подмножество множества E (рис. 5, д)), на котором сумма $x+y$ равна 1; 2; 3; 4. По существу здесь рассматриваем серию однотипных задач: найти пересечение $E \cap \{(x;y) \mid x+y=a\}$, где $a=1,2,3,4$.

Проводим параллельные прямые $x+y=a$, где $a=1,2,3,4$ (рис. 12) и обнаруживаем, что $E \cap \{(x;y) \mid x+y=4\} = \varnothing$.

Теперь естественно, возникает вопрос: какие значения может принимать сумма $x+y$ на множестве E? Как видно из рисунка 12 , наибольшей эта сумма будет в вершине четырёхугольника, удовлетворяющей системе $3x+4y=12$ и $2x+y=4$, т.е. $x+y=0{,}8+2{,}4=3{,}2$. При этом наименьшей – в вершине O. Таким образом, на множестве E $0 \le x+y \le 3{,}2$.

Итак, наибольшее и наименьшее значения сумма $x+y$ принимает на границе четырёхугольника.

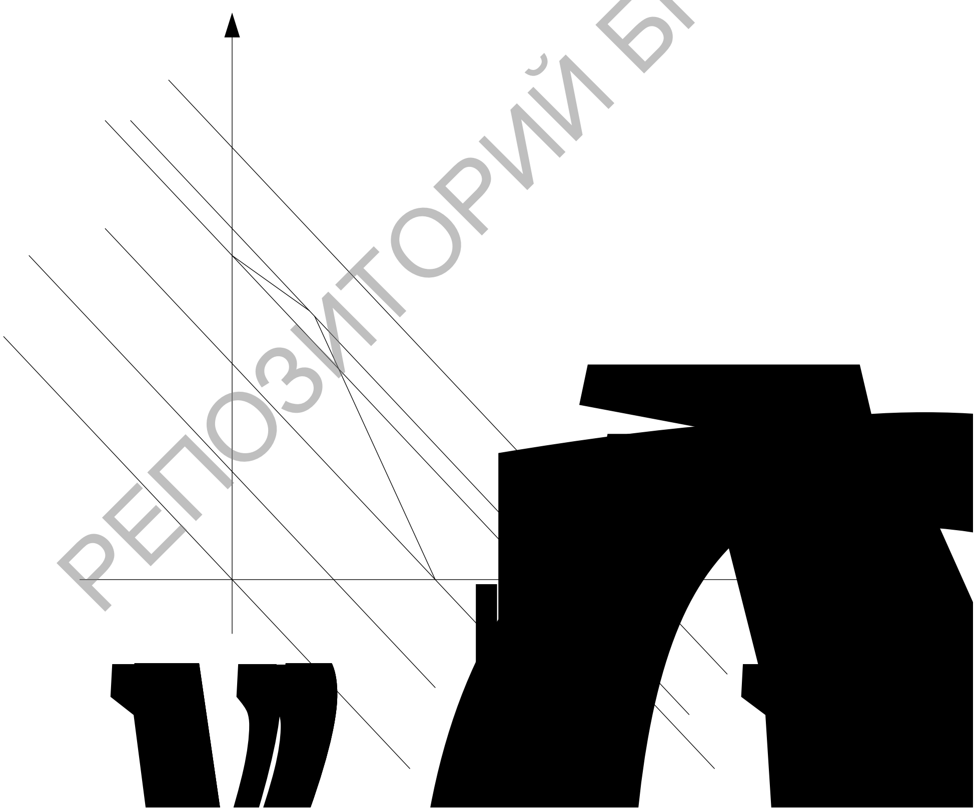

Рисунок 12

Чтобы доказать закономерность этого, выясним, чем отличаются точки границы от внутренних точек многоугольника.

Предлагаем учащимся в произвольном многоугольнике G (рис. 13) отметить точки A и B, лежащие на границе, и внутренние точки M и P.

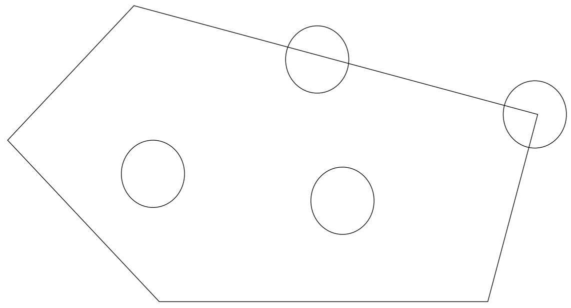

Рисунок 13

Чтобы приблизить учащихся к открытию различия между граничными и внутренними точками, можно сформулировать следующие вопросы:

все ли точки внутри окружности произвольного радиуса с центром в граничной точке принадлежат многоугольнику G; всегда ли можно провести такую окружность для внутренней точки с центром в этой точке, чтобы внутри её лежали только точки многоугольника [3]?

Таким образом, постепенно выясняется, в чём состоят характеристические свойства граничных и внутренних точек многоугольника. Теперь можно доказать, почему наибольшее и наименьшее значения сумма $x+y$ принимает на границе четырёхугольника, а не в его внутренних точках.

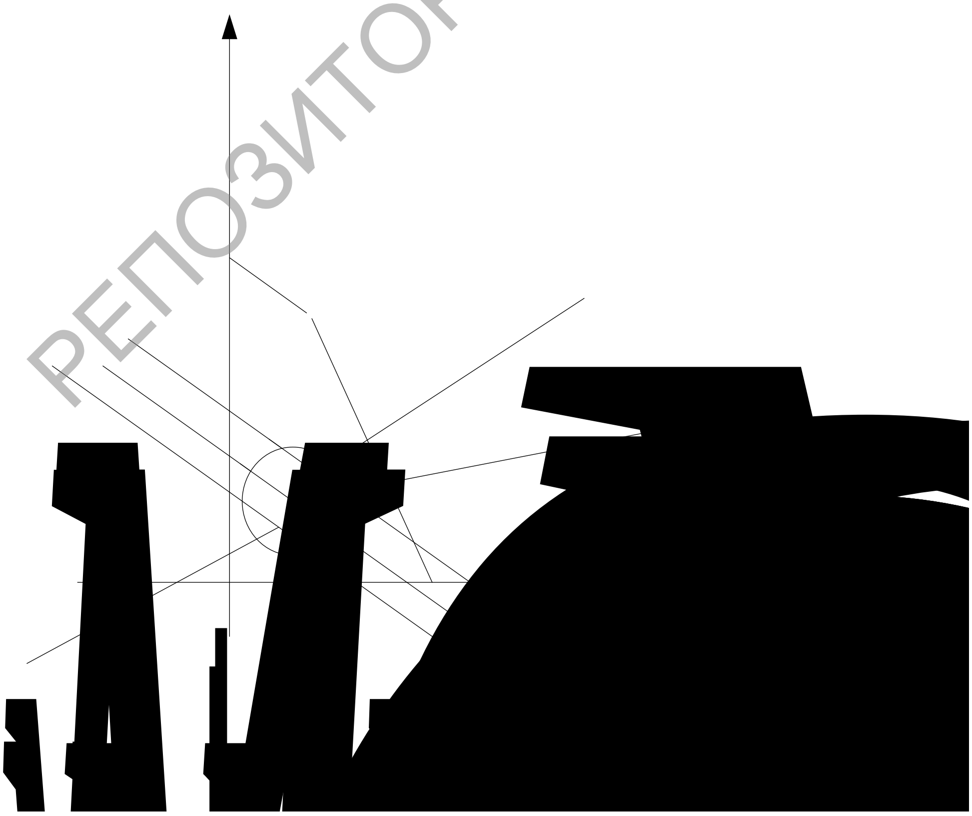

Рисунок 14

Пусть какая-нибудь прямая $x+y=a_1$ проходит через внутреннюю точку $M_1(x_1;y_1)$ четырёхугольника G (рис. 14). Тогда можно провести окружность с центром M_1, внутри которой лежат только внутренние точки четырёхугольника G. Возьмём внутри окружности две точки – $M_2(x_2; y_2)$, так, чтобы $x_2 > x_1$ и $y_2 > y_1$, и $M_3(x_3; y_3)$, так, чтобы $x_3 < x_1$ и $y_3 < y_1$ (что всегда возможно). Тогда имеем $x_2 + y_2 = a_2 > a_1$, $x_3 + y_3 = a_3 < a_1$.

Через точку M_2 проходит прямая $x + y = a_2$, а через M_3 – прямая $x + y = a_3$.

Следовательно, если сумма $x + y$ принимает во внутренней точке M_1 многоугольника G некоторое значение a_1, то это значение не может быть ни наибольшим, ни наименьшим.

Если же прямая $x + y = c_1$ имеет с G общую точку $(x_0; y_0)$, лежащую на границе, то это свидетельствует о том, что либо для $c > c_1$, либо для $c < c_1$ не будет общих точек прямой $x + y = c$ с многоугольником G.

Отсюда следует, что c_1 – наибольшее или наименьшее значение суммы $x + y$ на множестве G.

Полученные результаты далее можно обобщить.

Представим себе теперь, что мы имеем выпуклый многоугольник решений G и линейную функцию $z = ax + by$ (рис. 15). Ставим перед собой задачу определения тех точек многоугольника G, в которых линейная функция $z = ax + by$ достигает экстремума.

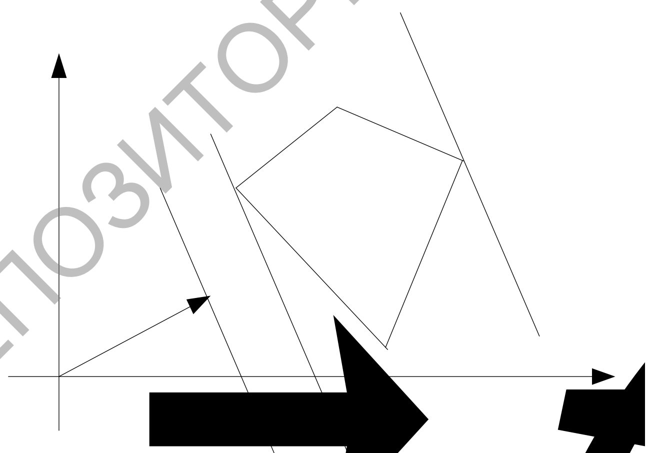

Рисунок 15

В прямоугольной системе координат строим точку $A(a; b)$, координаты которой совпадают с коэффициентами при переменных линейной функции $z = ax + by$. Соединив точку A с точкой O, получим нормальный вектор $\vec{n}(a; b)$. Через точку A проводим прямую (линию уровня) PQ, перпендикулярную OA.

Будем перемещать PQ вдоль вектора $\vec{n}$ параллельно самой себе. Пусть PQ впервые встретит многоугольник G в вершине C. В этом положении прямая будет опорной.

При дальнейшем перемещении в том же направлении прямая пройдет через вершину D и также будет опорной. Очевидно, что в точке C линейная функция $z = ax + by$ имеет наименьшее значение, а в точке D – наибольшее значение среди всех значений функции $z = ax + by$.

Следовательно, наибольшее и наименьшее значения линейной функции $z = ax + by$ на выпуклом многоугольнике G достигается в точках пересечения этого многоугольника с опорными прямыми, являющимися линиями уровня линейной функции $z = ax + by$. Чтобы определить экстремальные значения линейной функции достаточно найти координаты точек экстремума линейной функции и подставить их в выражение линейной функции.

Заметим, что пересечение опорной прямой с многоугольником G может состоять либо из одной точки (вершины), либо из бесконечного множества точек (стороны). На рисунке 16 представлен случай, когда линейная функция имеет наибольшее значение в каждой точке стороны A_1A_2 и наименьшее значение в точке B.

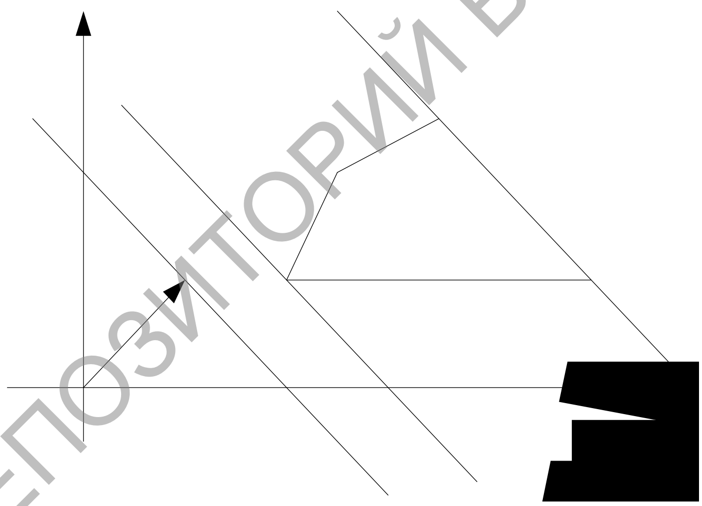

Рисунок 16

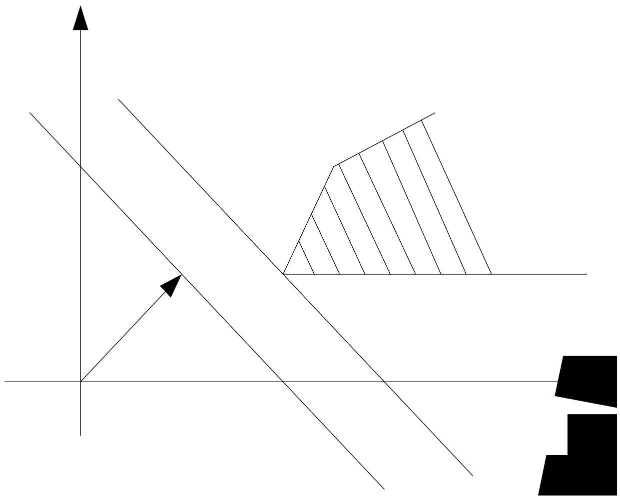

Рисунок 17

В случае неограниченной многоугольной области мы будем иметь либо точку максимума, либо точку минимума (рис. 17).

Далее можно проиллюстрировать учащимся графический способ решения задач линейного программирования, рассмотрев задачи для конкретного случая.

Рассмотрим решение сформулированной в начале статьи **задачи 1**.

Решение. Как было показано, необходимо найти наибольшее значение линейной функции $z = 5x + 10y$ в области, заданной системой неравенств (1). Множеством решений данной системы является многоугольник G, изображенный на рисунке 18.

Среди всех точек многоугольника G функция $z = 5x + 10y$ принимает наибольшее значение в вершине многоугольника $(4;6)$. Это значение равно $z(4;6) = 5 \cdot 4 + 10 \cdot 6 = 80$.

Ответ: 4 машины по пять тонн и 6 машин по 10 тонн.

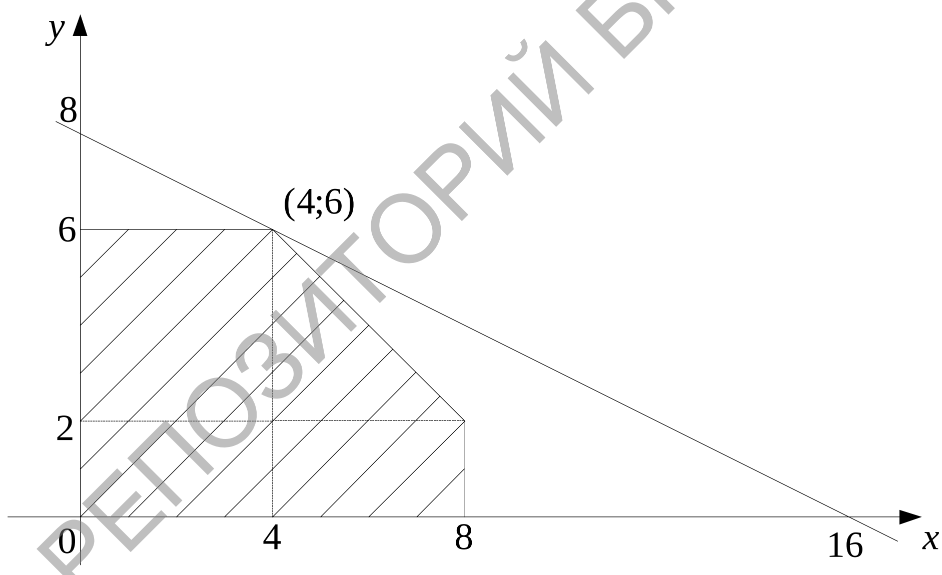

Рисунок 18

Задача 2. С железнодорожных станций A и B нужно развести грузы на склады № 1, № 2 и № 3. На станции A весь груз можно погрузить на 80 машин, а на станции B – на 100 машин. Склады должны принять: № 1 – 50 машин, № 2 – 70 машин, № 3 – 60 машин. Количество бензина в литрах, которое расходует одна машина на пробег от станции до склада, задается таблицей 1.

Таблица 1

Станции	Склады		
	№ 1	№ 2	№ 3
A	2	4	5
B	4	5	3

Требуется составить план перевозок, при котором общий расход бензина будет наименьшим.

Решение. Пусть x – число машин, отправленных со станции A на склад № 1, а y – со станции A на склад № 2. План перевозок тогда можно задать таблицей 2.

Таблица 2

Станции	Склады		
	№ 1	№ 2	№ 3
A	x	y	$80-x-y$
B	$50-x$	$70-y$	$x+y-20$

Из таблиц 1 и 2 найдем общий расход бензина

$$z(x,y)=2x+4y+5(80-x-y)+4(50-x)+5(70-y)+3(x+y-20)=$$
$$=890-4x-3y.$$

В таблице 2 все числа должны быть неотрицательными:

$$\begin{cases} x\geq 0, \\ y\geq 0, \\ 80-x-y\geq 0, \\ 50-x\geq 0, \\ x+y-20\geq 0, \\ 70-y\geq 0. \end{cases} \qquad (6)$$

Таким образом, задача свелась к нахождению наименьшего значения линейной функции $z(x,y)=890-4x-3y$ в области, заданной системой неравенств (6).

Множеством решений данной системы (6) является многоугольник G (рис. 19).

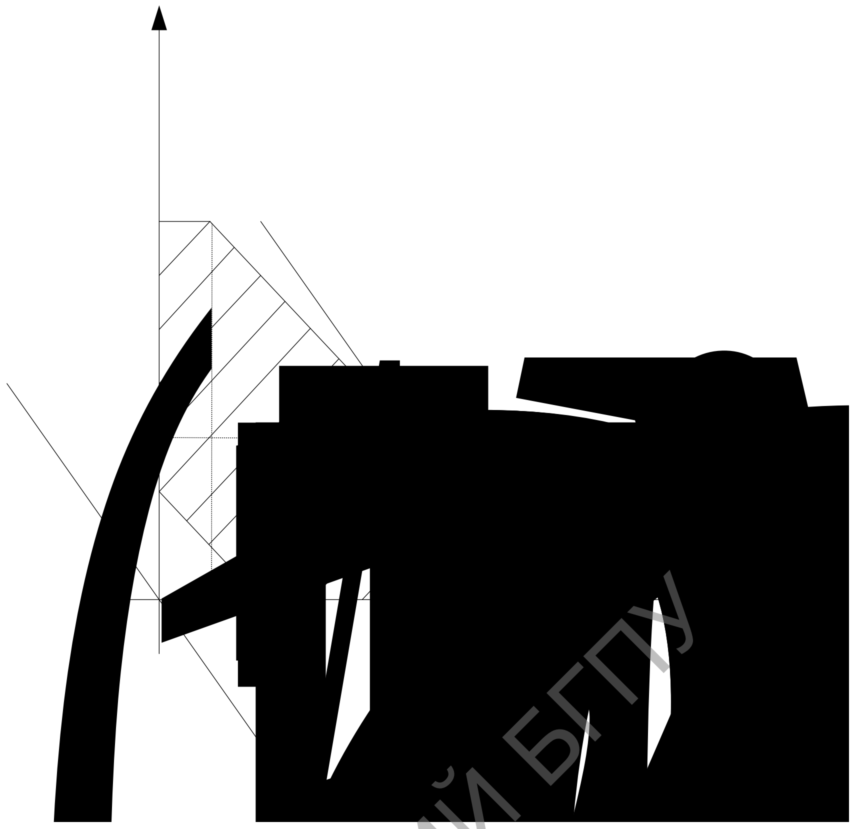

Рисунок 19

Наименьшее значение функция $z(x,y)=890-4x-3y$ принимает в одной из вершин многоугольника G. Вычисляя её значения в этих вершинах, получаем, что наименьшее из этих значений, равное 600, функция принимает при $x=50$, $y=30$.

При этих значениях x и y таблица 2 принимает следующий вид:

Станции	Склады		
	№ 1	№ 2	№ 3
A	50	30	0
B	0	40	60

При полученной схеме перевозок будет наименьший расход бензина, равный 600 л.

Задачи для самостоятельного решения

1. Автобаза должна выделить в распоряжение хлебозавода не менее 8 машин грузоподъемностью по 3 тонны и не менее 6 машин – по 5 тонн. Всего база может выделить не более 15 машин. Сколько машин по 3 тонны и 5 тонн нужно выделить, чтобы их общая грузоподъёмность была наибольшей?

2. Завод производит два вида продукции: велосипеды и мотоциклы. При этом цех по сборке велосипедов имеет мощность 100 тыс. штук в год, цех по сборке мотоциклов – 30 тыс. Механические цеха завода оснащены взаимозаменяемым оборудованием, и одна группа цехов может производить либо детали для 120 тыс. велосипедов, либо детали для 40 тыс. мотоциклов, либо любую комбинацию деталей, ограниченную этими данными. Другая группа механических цехов может выпускать детали либо для 80 тыс. велосипедов, либо для 60 тыс. мотоциклов, либо любую допустимую их комбинацию. В результате реализации каждой тысячи велосипедов завод получает прибыль в 2 тыс. ден. ед., а каждой тысячи мотоциклов – 3 тыс. ден. ед. Найти такое сочетание объёмов выпуска продукции, которое дает наибольшую сумму прибыли [4].

3. Для изготовления единицы сплава № 1 требуется металла A – 2 единицы, металла B – 3 единицы и металла C – 4 единицы. Для изготовления единицы сплава № 2 требуется соответственно 2, 5, 2 единицы металлов A, B, C. Всего имеется металлов A, B и C соответственно 24, 50 и 40 единиц. Масса единицы сплава № 1 равна 3 кг, а единицы сплава № 2 – 4 кг. Сколько единиц сплава № 1 и сплава № 2 нужно изготовить, чтобы их общая масса была наибольшей?

Список использованной литературы

1. Солодовников, А.С. Введение в линейную алгебру и линейное программирование / А.С. Солодовников.– М.: Просвещение, 1966.– 183 с.
2. Ананченко, К.О. Алгебра: Учеб. для 8-х кл. общеобразоват. шк. с углубл. изучением математики / К.О. Ананченко, Н.Т. Воробьёв, Г.Н. Петровский.– Мн.: Нар. асвета, 1994.– 542 с.
3. Столяр, А.А. Педагогика математики / А.А. Столяр.– Мн.: Вышэйшая школа, 1986.– 414 с.
4. Кузнецов, А.В. Руководство к решению задач по математическому программированию: Учеб. пособие / А.В. Кузнецов, Н.И. Холод, Л.С. Костевич; Под общ. ред. А.В. Кузнецова.– Мн.: Вышэйшая школа, 2001.– 448 с.
5. Балк, М.Б. Математика после уроков / М.Б. Балк, Г.Д. Балк.– М.: Просвещение, 1971.– 462 с.
6. Абчук, В.А. Экономико-математические методы: Элементарная математика и логика. Методы исследования операций / В.А. Абчук.– СПб.: Союз, 1999.– 320 с.
7. Стратилатов, П.В. Дополнительные главы по курсу математики. Учебное пособие по факультативному курсу для учащихся 9 классов / П.В. Стратилатов.– М.: Просвещение, 1974.– 142 с.

8. Гацура, А.С. Падрыхтоўка студэнтаў спецыяльнасці «Фізіка і матэматыка» да выкладання элементаў лінейнага праграміравання ў школе / А.С. Гацура, У.А. Шылінец // Весці БДПУ. Серыя 3.– 2005.– № 3.– С.14–17.

9. Сирл, С. Матричная алгебра в экономике / С. Сирл, У. Госман.– М.: Статистика, 1974.– 374 с.